$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ Schwarz

Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό με $f$ δυο φορές συνεχώς μερικώς διαφορίσιμη (ή ισοδύναμα λέμε $f$ δυο φορές συνεχώς διαφορίσιμη και γράφουμε $f \in C^2(U)$ το οποίο σημαίνει $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}: U \to \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς $\forall i,j = 1, \dots, n$

Τότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $\forall i,j = 1, \dots, n$ / όπου $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$

<u>Πόρισμα</u>

$f: U \to \mathbb{R}$ $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $k$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη

Τότε $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\pi(k)}} \cdots \partial x_{i_{\pi(1)}}}$ $\forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$

και για κάθε μετάθεση $\pi$ των αριθμών $1, \dots, k$

§ Θεώρημα Taylor 3.9

<u>ΟΡΙΣΜΟΙ / Συμβολισμοί</u>

1) $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ονομάζεται πολλαπλός δείκτης ή πολυδείκτης (multi-index)

Τάξης $|a| := a_1 + \dots + a_n$ με $a$ παραγοντικό $a! = a_1! \dots a_n!$

(όπου $a_i! = a_i(a_i - 1) \dots 2 \cdot 1$ για $a_i \in \mathbb{N}$, $0! := 1$

ii) Αν $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ τότε γράφουμε $\bar{x}^a := x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$

(όπου $x_i^0 := 1$)

iii) $$D^a f(\bar{x}) = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}} f(\bar{x})$$

__ΠΡΟΤΑΣΗ__

$U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό $f : U \to \mathbb{R}$ $k$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη

$\bar{x} \in U$ και $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\{\bar{x} + t\bar{u} : t \in [0,1]\} \subset U$

Τότε η $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ $g(t) := f(\bar{x} + t\bar{u})$, $t \in [0,1]$ είναι $k$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη και ισχύει $g^{(k)}(t) = \sum_{|a| = k} \frac{k!}{a!} D^a f(\bar{x} + t\bar{u}) \bar{u}^a$ $\forall t \in [0,1]$

αυτό σημαίνει ότι προσθέτουμε όλα τα αντικείμενα στα δεξιά πάνω από το σύνολο $\{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n : |a| = k\}$

__Απόδειξη__

(α) Αποδεικνύεται επαγωγικά ως προς $k$ ότι

$$g^{(k)}(t) = \underbrace{\sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n}}_{= \sum^{n} \dots \sum^{n}} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} (\bar{x} + t\bar{u}) u_{i_1} \dots u_{i_k} \quad \forall t \in [0,1]$$

Πράγματι για $\boxed{r=1}$ και $\gamma(t) = \bar{x} + t\bar{u}$ έχουμε

$$D\gamma(t) = \bar{u} \qquad \left[ D\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(x_1 + t u_1) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}(x_n + t u_n) \end{pmatrix} \right.$$

και άρα από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε $g'(t) = Dg(t) = D(f\circ\gamma)(t) =$

$$\underset{\text{Καν. Αλ.}}{=} Df(\gamma(t))\, D\gamma(t) = \overset{\text{κλίση}}{\nabla} f(\gamma(t)) \cdot \bar{u} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x} + t\bar{u})\, u_i$$

(β) Έστω ότι για κάποιο $\nu = 2, \dots, k$ ισχύει $g^{(\nu-1)}(t) = \sum_{i_1,\dots,i_{\nu-1}} \frac{\partial^{\nu-1} f}{\partial x_{i_{\nu-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(\bar{x}+t\bar{u})\, u_{i_1} \cdots u_{i_{\nu-1}}$

$$\Rightarrow g^{(\nu)}(t) = \frac{d}{dt} g^{(\nu-1)}(t) = \sum_{i_1,\dots,i_{\nu-1}}^{n} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial^{\nu-1} f}{\partial x_{i_{\nu-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(\bar{x}+t\bar{u})}\, u_{i_{\nu-1}} \cdots u_{i_1}$$

$$\underset{\text{Καν. Αλ.}}{=} \nabla \frac{\partial^{\nu-1} f}{\partial x_{i_{\nu-1}} \cdots \partial x_{i_1}}(\bar{x}+t\bar{u}) \cdot \bar{u} =$$

$$= \sum_{i_\nu=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_{i_\nu}} \frac{\partial^{\nu-1} f}{\partial x_{i_\nu} \partial x_{i_{\nu-1}} \cdots \partial x_{i_1}}}_{= \frac{\partial^{\nu} f}{\partial x_{i_\nu} \cdots \partial x_{i_1}}}(\bar{x}+t\bar{u})\, u_{i_\nu}$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_\nu=1}^{n} \frac{\partial^{\nu} f}{\partial x_{i_\nu} \cdots \partial x_{i_1}}(\bar{x}+t\bar{u})\, u_{i_1} \cdots u_{i_\nu}$$

$$\cancel{g^{(k)}(t) = \sum_{|a|=k} \frac{k!}{a!} D^a f(\bar{x}+t\bar{u})\, \bar{u}^a \quad t \in [0,1]}$$

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} (\bar{x}+t\bar{u}) y_{i_1}, \dots y_{i_k} \quad \forall\, t \in [0,1]$$

(γ) Έστω $s(i_1,\dots,i_k) := \dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} (\bar{x}+t\bar{u}) y_{i_1} \dots y_{i_k}$

όπου $(i_1,\dots i_k) \in \{1,\dots,n\}^k$ από τους οποίους δείκτες $a_\nu \in \{0,\dots,k\}$ δείκτες παίρνουν την τιμή $\nu \in \{1,\dots,n\}$ και άρα παράγουν ένα διάνυσμα $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ τέτοιο $|a| = a_1 + \dots + a_n = k$

Κάθε τέτοιο διάνυσμα $a$ είναι ίδιο για $\dfrac{k!}{a!} = \dfrac{k!}{a_1! \dots a_n!} = \binom{k}{a} = \binom{k}{a_1,\dots,a_n}$ διαφορετικές επιλογές ~~κ~~ δεικτών $(i_1,\dots i_k) \in \{1,\dots n\}^k$

Παράδειγμα

$k=1 \quad i_1 \in \{1,\dots,n\} \quad |a|=1 \quad a = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$

$k=2 \quad i_1, i_2 \in \{1,\dots,n\} \quad \underset{(a_1,\dots,a_n)}{|a|}=2 \Rightarrow a = (0,\dots,0,2,0,\dots,0)$ (ή θα είναι ίδια) $\vee$ ή

$(0,\dots 1, 0,\dots,1,\dots 0)$ (ή διαφορετικά)

Άρα για $k=1$ έχουμε $\dfrac{k!}{a!} = 1$ ενώ για $k=2$ και $a = (0,\dots,2,\dots 0)$ έχουμε $\dfrac{k!}{a!} = \dfrac{2}{2} = 1$ και για $k=2$ και $a = (0,\dots,1,0,\dots,1,0,\dots 0)$ έχουμε $\dfrac{k!}{1} = \dfrac{2}{1} = 2$

Το $\dfrac{k!}{a!} = \binom{k}{a}$ ονομάζεται πολυωνυμικός συντελεστής και για τον προηγούμενο ισχυρισμό (και την απόδειξή του) βλ. Βιβλίο Ζυγάρα Πρόταση 2.3.2

Από το πόρισμα του Θεωρήματος Schwarz γνωρίζουμε ότι για όλες τις επιλογές $(i_1, \dots, i_k)$ με το ίδιο $a$ ισχύει

$$s(i_1, \dots i_k) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(\bar{x} + t\bar{u})\,\bar{u}^a = D^a f(\bar{x}+t\bar{u})\,\bar{u}^a$$

και άρα $g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \dots i_k = 1}^{n} s(i_1, \dots i_k) = \sum_{a \in \{a \in \mathbb{N}^n : |a| = k\}} \frac{k!}{a!} D^a f(\bar{x}+t\bar{u})\bar{u}^a$

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|a|=k} \frac{k!}{a!} D^a f(\bar{x}+t\bar{u})\,\bar{u}^a \quad \forall\, t \in [0,1]$$

~~επίσης~~

**ΘΕΩΡΗΜΑ** Taylor (Βασικό)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό $\bar{x} \in U$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$, $\{\bar{x}+t\bar{u} : t \in [0,1]\} \subset U$ και έστω $f: U \to \mathbb{R}$ $k+1$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη. Τότε υπάρχει ένα $\theta \in [0,1]$ έτσι ώστε να ισχύει ο τύπος του Taylor

$$f(\bar{x}+\bar{u}) = \sum_{|a| \le k} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!}\bar{u}^a + \sum_{|a|=k+1} \frac{D^a f(\bar{x}+\theta\bar{u})}{a!}$$

**Απόδειξη**

Θεωρούμε την $g(t) = f(\bar{x}+t\bar{u})$ η οποία σύμφωνα με την

1) προηγούμενη πρόταση είναι $k+1$ φορές διαφορίσιμη. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor για πραγμ. συνάρτηση

$$g(1) = \sum_{m=0}^{k} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}$$

Όπως πάλι από την προηγούμενη πρόταση έχουμε $\frac{g^{(m)}(0)}{m!} = \sum_{|a|=m} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!}$

και $\frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} = \sum_{|a|=k+1} \frac{D^a \bar{f}(\bar{x}+\theta\bar{u})}{a!} \bar{u}^a$

<u>Πόρισμα</u>

Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $k$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη

Τότε ισχύει $f(\bar{x}+\bar{u}) = \sum_{|a|\leq k} \frac{D^a f(x)}{a!} \bar{u}^a + o\left(\|\bar{u}\|^k\right)$ όπου

$o(F(\bar{u})) = \bar{G}(\bar{u})$ για $\bar{u} \to \bar{0}$ ονομάζεται "μικρό όμικρον" συμβολισμός Landau και σημαίνει ότι

$$\lim_{\substack{\bar{u}\to 0 \\ (\bar{u}\neq 0)}} \frac{\bar{G}(\bar{u})}{F(\bar{u})} = \bar{0}$$

π.χ. $\bar{G}(\bar{u}) = o(1)$ για $u \to \bar{0}$ $\overset{}{\underset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow}}$ $\lim_{\bar{u}\to 0} \bar{G}(\bar{u}) = \bar{0}$

$\bar{G}(\bar{u}) = o(\|\bar{u}\|^k)$ για $\bar{u} \to \bar{0}$ $\underset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow}$ $\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{\bar{G}(\bar{u})}{\|\bar{u}\|^k} = \bar{0}$

δηλαδή το πόρισμα λέει ότι $\lim \frac{1}{\|\bar{u}\|^k}\left[f(\bar{x}+\bar{u}) - \sum_{|a|\leq k} \frac{D^a f(x)}{a!} \bar{u}^a\right] = \bar{0}$

$\boxed{\text{Απόδειξη}}$

$$f(\bar{x}+\bar{u}) \overset{\text{τύπος Taylor}}{=\!=\!=} \sum_{|a|\leq k-1} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{u}^a + \sum_{|a|=k} \frac{D^a f(\bar{x}+\theta\bar{u})}{a!} \bar{u}^a =$$

$$= \sum_{|a|\leq k} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{u}^a + \sum_{|a|=k} \frac{D^a f(\bar{x}+\theta\bar{u}) - D^a f(x)}{a!} \bar{u}^a$$

ν.δ.ο $\sum_{|a|=k} \frac{1}{a!} \left( D^a f(\bar{x}+\theta\bar{u}) - D^a f(\bar{x}) \right) \frac{\bar{u}^a}{\|\bar{u}\|^k} \xrightarrow[\bar{u}\to\bar{0}]{} 0$

Αρκεί ν.δ.ο $\underbrace{|D^a f(\bar{x}+\theta\bar{u}) - D^a f(\bar{x})|}_{\xrightarrow[\bar{u}\to\bar{0}]{} 0} \frac{|u_1^{a_1} \cdots u_n^{a_n}|}{\|\bar{u}\|^k} \xrightarrow[\bar{u}\to\bar{0}]{} 0$

$= \frac{|u_1|^{a_1} \cdots |u_n|^{a_n}}{\|\bar{u}\|^a} \leq \frac{\|\bar{u}\|^{a_1} \cdots \|\bar{u}\|^{a_n}}{\|\bar{u}\|^k} = 1$

Αφού $D^a f : U \to \mathbb{R}$ συνεχείς διότι

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall \bar{y} \in B(\bar{x},\delta) : |D^a f(\bar{y}) - D^a f(\bar{x})| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall \bar{u} \in B(\bar{x},\delta) \ |D^a f(\bar{x}+\theta\bar{u}) - D^a f(\bar{x})| < \varepsilon$

## Παρατήρηση / ΟΡΙΣΜΟΣ

Σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα έχουμε για $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό $f \in C^k(U)$ $f(\bar{x}+\bar{u}) = \sum_{m=0}^{k} P_m(\bar{u}) + o(\|\bar{u}\|)$ για $\bar{u} \to \bar{0}$

με $P_m(\bar{u}) = \sum_{|a|=m} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{u}^a$ όπου $P_m(\bar{u})$ είναι πολυώνυμα του $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ βαθμού $m \ (=|a|)$ για $\bar{u}^a = u_1^{a_1} \cdots u_n^{a_n}$

π.χ $m=2$ $\quad 28u_1^2 + 3u_1u_2 + 9u_2^2$

Το πολυώνυμο $T_{k,f,\bar{x}}(\bar{x}+\bar{u}) := \sum_{m=0}^{k} P_m(\bar{u})$ ονομάζεται πολυώνυμο Taylor βαθμού k της f στο $\bar{x}$

Πιο συγκεκριμένα (για να καταλάβουμε και τα προηγούμενα που είναι πιο γενικά) για $n=0,1,2$ έχουμε

(α) $\underline{n=0}$ $\Rightarrow |a|=0 \Rightarrow (a_1,\dots,a_n)\in \mathbb{N}_0^n$ με $a_1+\dots+a_n=0 \Rightarrow$

$$a=(0,\dots,0) \Rightarrow P_0(\bar{y})=\frac{D^a f(\bar{x})}{a!}\bar{y}^a \text{ για } a=(0,\dots,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0(\bar{y})=f(\bar{x})$$

(β) $\underline{n=1}$ $|a|=1 \Rightarrow (a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{N}_0^n$ με $a_1+\dots+a_n=1 \Rightarrow$

$$a=\bar{e}_j \quad j=1,\dots,n \Rightarrow P_1(\bar{y})=\sum_{|a|=1}\frac{D^a f(\bar{x})}{a!}\bar{y}^a=\sum_{i=1}^{n}\frac{D^{e_i}f(\bar{x})}{e_i!}\bar{y}^{e_i}$$

$\bar{e}_j = (0,\dots,1,0,\dots,0)$, με το 1 στη $j$-θέση

όπου $e_i!=1$, $\bar{y}^{e_i}=y_1^0y_2^0\dots y_i^1y_{i+1}^0\dots y_n^0=y_i$

$$D^{e_i}f(\bar{x})=\frac{\partial^{|e_i|}f(\bar{x})}{\partial x_1^0\dots\partial x_i^1\dots\partial x_n^0}=\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1(\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}y_i=\nabla f(\bar{x})\cdot\bar{y}$$